Macrodynamique I: le modèle OLG

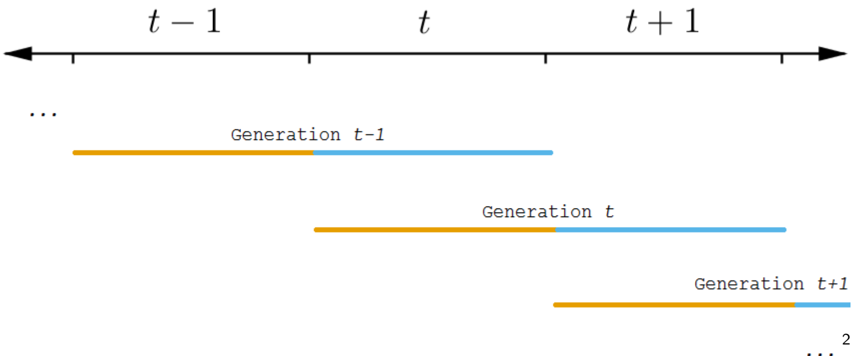
Thomas Baudin[1]

Septembre 2016

Le modèle OLG: un aperçu

Le modèle OLG part d'un constat simple: les générations doivent coexister... elles n'ont pas nécessairement les mêmes comportements ni les mêmes objectifs...

A quoi ressemble le plus simple des modèles à générations imbriquées?



Le modèle OLG: un aperçu

Le premier modèle OLG avec accumulation de capital physique a été proposé par Allais en 1947 mais il a été popularisé par Diamond en 1965.

Le modèle de Diamond (1965) explicite:

- l'accumulation de capital physique
- permet l'existence d'un secteur publique (on l'ignorera dans un premier temps)
- tous les biens sont réels: pas de monnaie

Hypothèses de base

Le temps est discret, on le note t tel que $t \in \mathbb{N}$; t prend donc des valeurs discrètes: $t = 0, 1, 2, 3, ..., T, ...$

Toutes les décisions d'un agent sont prises en un point du temps, la date courante est notée t; le but du modèle est d'étudier comment l'économie va évoluer entre $t = 0$ et $t \to +\infty$

Lorsque $t = 0$, on est au début des temps qui se caractérise par des conditions initiales résumant l'histoire de l'économie avant cette date.

A chaque période, trois types de biens:

- travail
- capital
- bien final produit à l'aide de capital et de travail

Le capital peut être soit consommé soir utilisé pour produire du capital demain, le bien final est le numéraire, son prix est normalisé à 1 à chaque début de période

Hypothèses de base

Chaque agent vit 2 périodes, la jeunesse et la vieillesse. Un agent né à la date t vivra:

- sa jeunesse à la période t:
  - dispose d'une unité de temps offerte sur le marché du travail de manière inélastique et lui rapportant un salaire réel w_t
  - décide de sa consommation de bien final c_t et de son épargne s_t, il ne peut pas s'endetter (par hypothèse)
  - son épargne lui rapportera un intérêt réel noté $R_{t+1} = 1 + r_{t+1}$
- sa vieillesse en $t + 1$:
  - ne travaille pas
  - ne se soucie pas de ce qui se passe après sa mort: pas d'altruisme envers les générations futures
  - consomme d_{t+1} qui sera égal au fruit de son épargne

Hypothèses de base

On en déduit les contraintes budgétaires courantes:

- En t:

$$c_t + s_t = w_t \tag{1}$$

- En $t+1$:

$$d_{t+1} = R_{t+1}s_t \tag{2}$$

Précision:

- en $t = 0$, les vieux disposent du capital physique initial qu'ils se partagent en parts égales tel que $d_0 = \frac{R_0 K_0}{N_{-1}}$
- le nombre de ménages croît au taux $n \in]-1, +\infty[$ tel que la population suit l'évolution suivante $N_{t+1} = (1+n)N_t \rightarrow$ les couts des enfants ne sont pas modélisés ni les décisions quant à leur nombre

Une question reste: comment les individus arbitrent-ils entre consommation en t et consommation en $t+1$, ou autrement dit, entre consommation et épargne?

Hypothèses de base: les préférences

Elles sont définies sur les paniers de consommation (c_t, d_{t+1}) et sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(c_t, d_{t+1})$$

On la suppose additivement séparable tel que:

$$U(c_t, d_{t+1}) = u(c_t) + \beta u(d_{t+1})$$

$\beta > 0$ est le taux d'escompte psychologique de l'individu tel que: $\beta = \frac{1}{1+\phi}$ où ϕ représente le taux de préférence pour le présent.

$u(.)$ est deux fois différentiable par rapport à chacun de ses arguments. On note $u_x^{'} = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$. On pose les hypothèses suivantes $\forall x > 0$:

$$u_x^{'} > 0 \quad , \quad u_{xx}^{''} \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} u_x^{'} = +\infty$$

Ces hypothèses impliquent que c et d sont des biens normaux: leur demande croit quand le revenu croit, de plus les demandes sont strictement positives si le revenu est positif

Les préférences: un exemple

La fonction CIES (constant intertemporal elasticity of substitution):

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad , \quad \sigma > 0 \quad \text{and} \quad \sigma \neq 1$$

Dérivées:

$$u_c^{'} = c^{-\frac{1}{\sigma}} > 0 \quad , \quad u_{cc}^{''} = -\frac{1}{\sigma} c^{-\frac{1}{\sigma}-1} < 0$$

Limite:

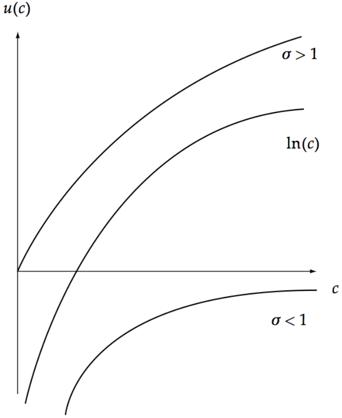
$$\lim_{c \to 0} u_c^{'} = \lim_{c \to 0} c^{-\frac{1}{\sigma}} = +\infty$$

Notons que σ correspond à l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation:

$$\frac{u_{cc}^{''} c}{u_c^{'}} = -\frac{1}{\sigma}$$

Les préférences: un exemple

- lorsque $\sigma < 1$, $u(c) < 0 \; \forall c$
- lorsque $\sigma = 1$, $u(c) \to \ln c \; \forall c$
- lorsque $\sigma > 1$, $u(c) > 0 \; \forall c$



Hypothèses de base: la production

On est dans un cadre néoclassique, la forme de la fonction de production est la même à chaque période

On note Y_t les quantités nettes produites à la période t tel que:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

On suppose aussi que la fonction est homogène de degré 1, les rendements d'échelle sont donc constants:

$$\forall \ \ \lambda > 0, F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda Y_t$$

Hypothèses de base: les firmes

On suppose l'existence d'une firme représentative (équivalent à $n > 1$ firmes lorsque les rendements sont constants)

A la date $t = 0$, le capital K_0 est déjà installé dans la firme et peut être utilisé; pour les périodes suivantes, le capital est issu de l'épargne de la période précédente, il faut donc une période pour que le capital ne devienne productif tel que:

$$K_{t+1} = I_t = N_t s_t$$

I_t représente ici l'investissement agrégé. Les ménages restent propriétaires du capital et recevront donc les rendements de ce dernier (les profits de la firme) lorsqu'ils seront vieux.

Hypothèses de base: les firmes et la production

Les rendements étant constants, on peut exprimer $F(K_t, L_t)$ en fonction d'une seule variable $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ représentant le capital par tête efficace:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = L_t F(\frac{K_t}{L_t}, 1) = L_t F(k_t, 1) = L_t f(k_t)$$

Dès lors, la production par tête efficace $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}$ s'écrit simplement $y_t = f(k_t)$

On fait alors les hypothèses suivantes sur $f(\cdot)$:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f^{'}(k) > 0 \quad , \quad f^{''}(k) < 0 \quad , \quad \lim_{k \to +\infty} f^{'}(k) < 1 \quad , \quad \lim_{k \to 0} = +\infty$$

Notons que l'hypothèse $\lim_{k \to +\infty} f^{'}(k) < 1$ ne respecte pas les conditions d'Inada afin de pouvoir inclure la fonction CES

Productivité marginale du travail:

$$\frac{dY}{dL} = F(\frac{K}{L}, 1) - L\frac{K}{L^2}F_K^{'}(\frac{K}{L}, 1) = f(k) - kf^{'}(k) \equiv \omega(k)$$

Firmes et production: CES

La fonction CES (Constant Elasticity of Substitution) est très usitée, elle est plus générale que la Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} Y_t &= F(K,L) = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\ A > 0 \quad &, \quad \rho > -1 \ , \ \rho \neq 1 \ , \ \alpha \in]0,1[\end{aligned}$$

Rendements constants:

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda L) &= A\left[\alpha(\lambda K)^{-\rho} + (1-\alpha)(\lambda L)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\ &= A\left[\alpha \lambda^{-\rho} K^{-\rho} + (1-\alpha)\lambda^{-\rho} L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\ &= A\left[\lambda^{-\rho}(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho})\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\ &= \lambda A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} = \lambda F(K,L) \end{aligned}$$

Firmes et production: CES

Elasticité de substitution entre capital et travail:

$$dY = F_K^{'}(K,L)dK + F_L^{'}(K,L)dL = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dK}{dL} = -\frac{F_L^{'}(K,L)}{F_K^{'}(K,L)} = -\frac{1}{1+\rho}$$

Lorsque $\rho \to -1$, alors $Y = A\left[\alpha K + (1-\alpha)L\right]$, substitution parfaite

Lorsque $\rho \to 0$, alors $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, cas Cobb-Douglas

Lorsque $\rho \to +\infty$, alors $Y = A\min[K, L]$, cas Leontief

Firmes et production: CES

Elasticité de substitution entre capital et travail:

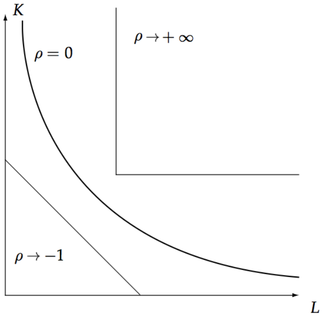


Figure 1.3. The CES production function. The isoquant when $\rho \to +\infty$ shows that capital and labor are complements (no substitution possibilities) in the production process (Leontief technology). For $\rho = 0$ we obtain the isoquant of the Cobb–Douglas function. When $\rho \to -1$, the isoquant becomes linear, and capital and labor can be substituted perfectly.

Firmes et production: CES

Forme intensive:

$$
\begin{aligned}
\frac{Y}{L} &= \frac{A\left[\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}{L} \\
&= \frac{A\left[\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}{\left(L^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}} \\
&= A\left[\alpha \frac{K}{L}^{-\rho}+(1-\alpha)\right]^{-\frac{1}{\rho}} = f(k)
\end{aligned}
$$

On peut aisément vérifier que $f^{'}(k) > 0$ et $f^{''}(k) < 0$ alors que:

$$\omega(k) = \frac{1-\alpha}{A^{\rho}} f(k)^{1+\rho}$$

Comportements des ménages

Tous les individus sont preneurs de prix (CPP), les jeunes ménages décident de leur arbitrage entre consommation et épargne alors que les vieux consomment le fruit de leur épargne

Programme de maximisation:

$$\max_{c_t, d^e_{t+1}} u(c_t) + \beta u(d^e_{t+1})$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & c_t + s_t = w_t \\ & d^e_{t+1} = R^e_{t+1} s_t \\ & d^e_{t+1} \geq 0 \quad , \quad c_t \geq 0 \end{aligned}$$

On note x^e_{t+1} la valeur anticipée par l'agent pour x_{t+1}.

Comportements des ménages

On peut résoudre ce programme soit par substitution soit à l'aide d'un Lagrangien.

Par substitution:

$$\max_{s_t} u(w_t - s_t) + \beta u(R^e_{t+1} s_t)$$

Comme u est croissante et concave, on sait que cet objectif est concave. On en arrivera à la CPO suivante:

$$u'(w_t - s_t) = \beta R^e_{t+1} u'(R^e_{t+1} s_t)$$

On note alors $s(w_t, R^e_{t+1})$ la solution de cette équation.

Comportements des ménages

Par le Lagrangien:

$$\max_{c_t, d^e_{t+1}} \mathcal{L}(c_t, d^e_{t+1}) = u(c_t) + \beta u(d_{t+1}) + \lambda \left(w_t - c_t - \frac{d^e_{t+1}}{R^e_{t+1}} \right)$$

On en arrivera aux CPO suivantes:

$$\begin{aligned} u^{'}(c_t) &= \lambda \\ u^{'}(d^e_{t+1}) &= \frac{\lambda}{\beta R^e_{t+1}} \end{aligned}$$

Ce qui aboutit à la condition suivante:

$$u'(c_t) = \beta R^e_{t+1} u'(d^e_{t+1})$$

Comportements des ménages: la CIES

La condition:

$$u'(c_t) = \beta R^e_{t+1} u'(d^e_{t+1}),$$

devient:

$$\frac{d^e_{t+1}}{c_t} = (\beta R^e_{t+1})^\sigma$$

On remarque donc ici que dans le cas d'une fonction CES, un accroissement du rendement espéré du capital accroit la consommation future relativement à la consommation présente...

attention, cela ne veut pas dire que c_t baisse nécessairement!!!

Comportements des ménages: la CIES

La condition:

$$u'(c_t) = \beta R^e_{t+1} u'(d^e_{t+1}),$$

devient:

$$\frac{d^e_{t+1}}{c_t} = (\beta R^e_{t+1})^{\sigma}$$

On remarque donc ici que dans le cas d'une fonction CES, un accroissement du rendement espéré du capital accroit la consommation future relativement à la consommation présente...

attention, cela ne veut pas dire que c_t baisse nécessairement!!!

Comportements des ménages: la fonction d'épargne

La fonction d'épargne est notée $s(w_t, R^e_{t+1})$ et elle est définie implicitement par la CPO:

$$\phi(s_t, w_t, R^e_{t+1}) \equiv u^{'}(w_t - s_t) - \beta R^e_{t+1} u^{'}(R^e_{t+1} s_t) = 0$$

On utilise alors le théorème de la fonction implicite pour déterminer l'impact d'une variation de w_t et de R^e_{t+1} sur s_t.

Différentielle totale:

$$\phi^{'}_{R^e_{t+1}} dR^e_{t+1} + \phi^{'}_{s_t} ds_t + \phi^{'}_{w_t} dw_t = 0 \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi^{'}_{s_t} &= -u^{''}(w_t - s_t) - \beta (R^e_{t+1})^2 u^{''}(R^e_{t+1} s_t) && (4)\\
\phi^{'}_{R^e_{t+1}} &= -\beta u^{'}(R^e_{t+1} s_t) - \beta R^e_{t+1} s_t u^{''}(R^e_{t+1} s_t) && (5)\\
\phi^{'}_{w_t} &= u^{''}(w_t - s_t) && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}$$

Comportements des ménages: la fonction d'épargne

Hausse du salaire

En supposant $dR^e_{t+1} = 0$, (3), (5) et (7) impliquent:

$$\frac{ds_t}{dw_t} = -\frac{\phi'_{w_t}}{\phi'_{s_t}} = \frac{u''(w_t - s_t)}{u''(w_t - s_t) + \beta(R^e_{t+1})^2 u''(R^e_{t+1} s_t)} > 0 \tag{8}$$

Notons que $\frac{ds_t}{dw_t} \in [0, 1]$.

Hausse du taux d'intérêt espéré

En supposant $dw_t = 0$, (3), (5) et (6) impliquent:

$$\frac{ds_t}{dR^e_{t+1}} = -\frac{\phi'_{R^e_{t+1}}}{\phi'_{s_t}} = \frac{-\beta u'(R^e_{t+1} s_t)(1 - \frac{1}{\sigma(d_{t+1})})}{u''(w_t - s_t) + \beta(R^e_{t+1})^2 u''(R^e_{t+1} s_t)} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow \sigma(d_{t+1}) \lesseqgtr 1 \tag{9}$$

avec $\sigma(d_{t+1}) \equiv -\frac{u'(d_{t+1})}{d_{t+1} u''(d_{t+1})}$ l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle

Comportements des ménages: la fonction d'épargne

Hausse du taux d'intérêt espéré

Deux effets s'opposent:

- Effet substitution: $\Delta^+ R^e_{t+1} \Rightarrow \Delta^+$ prix de la consommation en $t \Rightarrow \Delta^- c_t$ et $\Delta^+ d_{t+1}$
- Effet revenu: $\Delta^+ R^e_{t+1} \Rightarrow \Delta^+$ du revenu de cycle de vie $\Rightarrow \Delta^+ c_t$ et $\Delta^+ d_{t+1}$

Si $\sigma(d_{t+1}) > 1$ alors l'effet revenu est dominé par l'effet substitution et inversement.

Comportements des ménages: la fonction d'épargne

Le cas CIES

La solution du programme de maximisation dans le cas CIES est la suivante:

$$c = \frac{\beta^{-\sigma} R^{1-\sigma}}{1 + \beta^{-\sigma} R^{1-\sigma}} w$$
$$s = \frac{w}{1 + \beta^{-\sigma} R^{1-\sigma}}$$
$$d = \frac{R}{1 + \beta^{-\sigma} R^{1-\sigma}} w$$

Dans le cas logarithmique où $\sigma = 1$, un accroissement de R^e_{t+1} n'a pas d'impact sur l'épargne car les effets substitution et revenus se compensent parfaitement

Comportement des firmes

Le capital étant installé à la période précédentes, les firmes ne décident pas de K_t mais uniquement de L_t à la date t:

$$\max_{L_t} \pi(L_t) = F(K_t, L_t) - w_t L_t$$

On obtient la condition du premier ordre suivante:

$$w_t = F'_{L_t}(K_t, L_t) = \omega(k_t) \tag{10}$$

Les profits sont alors versés aux détenteurs du capital:

$$\pi_t = Y_t - w_t L_t = F(K_t, L_t) - F'_{L_t}(K_t, L_t) L_t \tag{11}$$

$$= F'_{K_t}(K_t, L_t) K_t = f'\left(\frac{K_t}{L_t}\right) K_t \tag{12}$$

Les firmes qui investissent reçoivent l'épargne des jeunes:

$$I_t = N_t s_t \tag{13}$$

Comportement des firmes: le cas Cobb-Douglas

$$w_t = A(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$
$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{w_t}{y_t} = 1-\alpha$$

Equilibre général

Nous devons distinguer deux types d'équilibre:

- Equilibre temporaire: étant donné à la fois le passé résumé par s_{t-1} et donc I_{t-1} et les anticipations du futur R^e_{t+1}, on peut déterminer, sous certaines conditions, un équilibre concurrentiel, c'est à dire une situation dans laquelle les agents ont optimisé leurs comportements et les marchés sont à l'équilibre.
- Equilibre intertemporel: il désigne la trajectoire complète des équilibres temporaires étant donné le sentier des anticipations

Equilibre temporaire

Seuls deux marchés sont ouverts: le marché des biens et le marché du travail. Il n'y a pas réellement de marché du capital puisqu'à la date t, le capital est déjà installé dans l'entreprise... cependant, il faut que le profit réalisé corresponde au profit distribué (rémunération du capital installé):

1. Equilibre du marché du travail

Il se réalise lorsque $L_t = N_t$ et par l'équation 10, on a:

$$w_t = F'_{L_t}(K_t, L_t) = \omega(k_t) \tag{14}$$

Equilibre temporaire

2. Distribution des profits réalisés

Par l'équation 12, on a:

$$\pi_t = f^{'}(k_t)K_t \tag{15}$$

Ce profit rémunère l'épargne des ménages tel que:

$$f^{'}(k_t)K_t = N_{t-1}s_{t-1}R_t$$

Or nous savons que $N_{t-1}s_{t-1} = I_{t-1} = K_t$, on en déduit que:

$$R_t = f^{'}(k_t) \tag{16}$$

Equilibre temporaire

3. Equilibre du marché des biens

L'offre de biens émises par les entreprises est égale à $Y_t = L_t f(k_t)$

La demande de biens émane des ménages:

- les vieux consomment du bien final: $N_{t-1}d_t$
- les jeunes le consomment et l'épargne: $N_t(c_t + s_t)$

On obtient alors la condition d'équilibre suivante:

$$Y_t = N_t f(k_t) = N_{t-1}d_t + N_t(c_t + s_t) \tag{17}$$

Equilibre temporaire

Notons que la loi de Walras s'applique: l'équilibre du marché des biens est une conséquence de l'équilibre du marché du travail et de l'égalité entre profits réalisés et distribués, étant donné la contrainte de budget des agents. Les contraintes de budget des agents impliquent que:

$$N_t(c_t + s_t) = N_t w_t = N_t(f(k_t) - k_t f'(k_t)) = Y_t - K_t F'_{K_t}(K_t, L_t)$$
$$N_{t-1} d_t = N_{t-1} s_{t-1} R_t = K_t f'(k_t) = K_t F'(K_t, L_t)$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient l'équation 17

Equilibre temporaire: définition

Equilibre temporaire: étant donné les variables de la période $t-1$, $\{s_{t-1}, I_{t-1} = s_{t-1}N_{t-1}\}$ et le taux de rendement espéré du capital R^e_{t+1}, l'équilibre temporaire à la date t est défini par:

1. le taux de salaire w_t et le taux de rendement du capital R_t,
2. les variables agrégées K_t, L_t, Y_t, k_t, I_t,
3. les variables individuelles c_t, s_t, d_t

qui satisfont les conditions d'optimalité du programme de maximisation des agents et les conditions d'équilibre 14, 16 et 17.

Equilibre temporaire: définition

Un équilibre temporaire $\{w_t, R_t, K_t, L_t, Y_t, k_t, I_t, c_t, s_t, d_t\}$ peut s'exprimer comme une fonction de $k_t = \frac{K_t}{N_t} = \frac{I_{t-1}}{N_t}$ et de R^e_{t+1}, tel que:

$$\begin{aligned}
s_t &= s(\omega(k_t), R^e_{t+1}) \\
c_t &= w_t - s_t \\
d_t &= R_t s_{t-1} \\
w_t &= \omega(k_t) \\
R_t &= f^{'}(k_t) \\
L_t &= N_t \\
Y_t &= N_t f(k_t) \\
I_t &= N_t s_t
\end{aligned}$$

Clé de compréhension: toutes les fonctions présentées ici sont bijectives, connaitre k_t et R^e_{t+1} permet donc de déduire tout le reste... or on connait k_t et R^e_{t+1} $\rightarrow$ Existence et unicité de l'équilibre

Equilibre temporaire: définition

Un équilibre temporaire $\{w_t, R_t, K_t, L_t, Y_t, k_t, I_t, c_t, s_t, d_t\}$ peut s'exprimer comme une fonction de $k_t = \frac{K_t}{N_t} = \frac{I_{t-1}}{N_t}$ et de R^e_{t+1}, tel que:

$$
\begin{aligned}
s_t &= s(\omega(k_t), R^e_{t+1}) \\
c_t &= w_t - s_t \\
d_t &= R_t s_{t-1} \\
w_t &= \omega(k_t) \\
R_t &= f^{'}(k_t) \\
L_t &= N_t \\
Y_t &= N_t f(k_t) \\
I_t &= N_t s_t
\end{aligned}
$$

Clé de compréhension: toutes les fonctions présentées ici sont bijectives, connaitre k_t et R^e_{t+1} permet donc de déduire tout le reste... or on connait k_t et R^e_{t+1} $\rightarrow$ Existence et unicité de l'équilibre

Equilibre temporaire: définition

Un équilibre temporaire $\{w_t, R_t, K_t, L_t, Y_t, k_t, I_t, c_t, s_t, d_t\}$ peut s'exprimer comme une fonction de $k_t = \frac{K_t}{N_t} = \frac{I_{t-1}}{N_t}$ et de R^e_{t+1}, tel que:

$$\begin{aligned}
s_t &= s(\omega(k_t), R^e_{t+1}) \\
c_t &= w_t - s_t \\
d_t &= R_t s_{t-1} \\
w_t &= \omega(k_t) \\
R_t &= f^{'}(k_t) \\
L_t &= N_t \\
Y_t &= N_t f(k_t) \\
I_t &= N_t s_t
\end{aligned}$$

Clé de compréhension: toutes les fonctions présentées ici sont bijectives, connaitre k_t et R^e_{t+1} permet donc de déduire tout le reste... or on connait k_t et R^e_{t+1} $\rightarrow$ Existence et unicité de l'équilibre

Equilibre temporaire: Exercice de TD

A. *On va se placer dans un premier temps dans le cas log-linéaire et Cobb-Douglas où* $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ *et* $A = 10$*:*

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad , \quad U(c_t, d_{t+1}) = \ln c_t + \beta \ln d_{t+1}$$

Questions:

1. Déterminer les choix optimaux des ménages. Calculez l'impact d'une hausse de w_t puis de R^e_{t+1} sur c_t, s_t, d^e_{t+1}.
2. Déterminer le comportement de demande de travail des firmes.
3. Décrivez les conditions d'équilibre sur le marché du travail et des biens.
4. Décrivez la condition de correspondance entre profits réalisés et distribués.
5. En déduire les conditions d'équilibre temporaire.
6. Déterminez les valeurs d'équilibre de toutes les variables dans l'hypothèse (pas nécessairement vérifiée) où $k_{t-1} = 1000$, $k_t = 1010$ et $R^e_{t+1} = 1.05$.

Equilibre temporaire: Exercice de TD

B. *Même questions que pour la partie A avec le jeu d'hypothèses suivant:*

$$Y_t = F(K, L) = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \ , \ \rho = \frac{1}{2},$$

et,

$$U(c_t, d_{t+1}) = \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} + \beta\frac{d_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad , \quad \sigma = \frac{1}{2}$$

Equilibre temporaire: Exercice de TD

C. *Nous allons nous placer dans un cas plus général d'une fonction d'utilité quasi-log linéaire et d'une fonction de production Cobb-Douglas tel que:*

$$\begin{aligned} U(c_t, d_{t+1}) &= \ln(c_t + c_0) + \beta \ln(d_{t+1} + d_0) \;\; , \;\; \beta > 0 \;,\; c_0 > 0 \;,\; d_0 > 0 \\ Y_t &= AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \;\; , \;\; \alpha \in]0, 1[\end{aligned}$$

1. Montrez que cette fonction d'utilité ne respecte pas les conditions d'Inada. Que cela signifie-t-il? Est-ce réaliste?
2. Déterminez les choix optimaux des ménages en fonction de k_t en ne négligeant pas les solutions de coin.
3. Déterminez la demande de travail des firmes.
4. Décrivez les conditions d'équilibre sur le marché du travail et des biens selon les valeurs de k_t (on doit distinguer le cas avec capital de départ faible du cas avec capital de départ élevé).
5. Décrivez la condition de correspondance entre profits réalisés et distribués.
6. En déduire les conditions d'équilibre temporaire (dans les deux cas).
7. Déterminez les valeurs d'équilibre de toutes les variables dans l'hypothèse (pas nécessairement vérifiée) où $k_{t-1} = 100$, $k_t = 101$ et $R^e_{t+1} = 1.01$.

Equilibre intertemporel

L'équilibre intertemporel se définit comme la séquence $\{k_t\}_{t=0}^{+\infty}$ qui assure l'équilibre temporaire $\forall t$. La dynamique du stock de capital physique par tête est donné par la condition d'équilibre du marché du capital:

$$K_{t+1} = I_t = N_t s_t \tag{18}$$

Ce qui peut encore s'écrire:

$$(1+n)k_{t+1} = s\left(w(k_t), f^{'}(k_{t+1})\right) \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta(k_{t+1}, k_t) \equiv (1+n)k_{t+1} - s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) = 0 \tag{20}$$

Questions à se poser:

- L'équilibre intertemporel existe-t-il?
- L'équilibre est-il unique? (existe-t-il un unique k_{t+1} assurant l'équilibre du marché du capital?)
- La dynamique converge-t-elle vers un ou des états stationnaires?
- Ces derniers sont-ils stables?

Equilibre intertemporel

L'équilibre intertemporel se définit comme la séquence $\{k_t\}_{t=0}^{+\infty}$ qui assure l'équilibre temporaire $\forall t$. La dynamique du stock de capital physique par tête est donné par la condition d'équilibre du marché du capital:

$$K_{t+1} = I_t = N_t s_t \tag{18}$$

Ce qui peut encore s'écrire:

$$(1+n)k_{t+1} = s\left(w(k_t), f^{'}(k_{t+1})\right) \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta(k_{t+1}, k_t) \equiv (1+n)k_{t+1} - s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) = 0 \tag{20}$$

Questions à se poser:

- L'équilibre intertemporel existe-t-il?
- L'équilibre est-il unique? (existe-t-il un unique k_{t+1} assurant l'équilibre du marché du capital?)
- La dynamique converge-t-elle vers un ou des états stationnaires?
- Ces derniers sont-ils stables?

Equilibre intertemporel: existence

La question plus précise est: existe-t-il $\forall k_t \geq 0$ au moins un k_{t+1} qui puisse résoudre l'équation 20?

Un moyen de répondre à cette question, c'est de vérifier si la fonction $\Delta(k_{t+1}, k_t)$ prend à la fois des valeurs positives et négatives

1. Que devient $\Delta(k_{t+1}, k_t)$ lorsque $k_{t+1} \to 0$?

$$\lim_{k_{t+1}\to 0} \Delta(k_{t+1}, k_t) = \lim_{k_{t+1}\to 0} -s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right)$$

Plusieurs cas de figure se présentent alors selon la forme de $f(\cdot)$:

Cas 1: $f^{'}(0)$ est défini:

$$\lim_{k_{t+1}\to 0} f^{'}(k_{t+1}) = f^{'}(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{k_{t+1}\to 0} \Delta(k_{t+1}, k_t) = -s\left(w(k_t), f'(0)\right) < 0$$

Equilibre intertemporel: existence

Cas 2: $f^{'}(0)$ n'est défini, Inada s'applique:

$$\lim_{k_{t+1}\to 0} f^{'}(k_{t+1}) = +\infty$$

Dans ce cas, les rendements de l'épargne deviennent infinis et il existe alors deux possibilités: l'épargne reste positive ou elle tend vers 0.

Sous-cas 2.1: $\lim_{k_{t+1}\to 0} s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) > 0$

On a alors le résultat suivant:

$$\lim_{k_{t+1}\to 0} \Delta(k_{t+1}, k_t) = \lim_{k_{t+1}\to 0} -s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) < 0$$

Equilibre intertemporel: existence

Sous-cas 2.2: $\lim_{k_{t+1}\to 0} s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) = 0$

Dès lors, la question qui se pose est la suivante: $\lim_{k_{t+1}\to 0} \Delta(k_{t+1}, k_t) = 0$ oui mais, 0^+ ou 0^-?

Réponse intuitive: 0^+ car $d_{t+1} > 0$ nécessite $s_t > 0$ donc c'est forcément $\lim_{k_{t+1}\to 0} s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) = 0^+$

Equilibre intertemporel: existence

Sous-cas 2.2: $\lim_{k_{t+1}\to 0} s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) = 0$

Dès lors, la question qui se pose est la suivante: $\lim_{k_{t+1}\to 0} \Delta(k_{t+1}, k_t) = 0$ oui mais, 0^+ ou 0^-?

Réponse intuitive: 0^+ car $d_{t+1} > 0$ nécessite $s_t > 0$ donc c'est forcément $\lim_{k_{t+1}\to 0} s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) = 0^+$

Equilibre intertemporel: existence

Réponse plus formelle:

On peut ré-écrire la consommation de seconde période comme $d_{t+1} = f'(k_{t+1})s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right)$ et celle de première période comme $c_t = \omega(k_t) - s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right)$.

On peut donc écrire grâce à la CPO du programme du consommateur que:

$$\lim_{k_{t+1} \to 0} u^{'}(d_{t+1}) = \lim_{k_{t+1} \to 0} \frac{u^{'}\left(\omega(k_t) - s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right)\right)}{\beta f'(k_{t+1})} = 0$$

Ceci est dû au fait que $k_t \in \mathbb{R}$ alors que $s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) \to 0$ quand $k_{t+1} \to 0$.

Dès lors, si l'utilité marginale de d_{t+1} tend vers 0, alors $d_{t+1} = f'(k_{t+1})s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) \to +\infty$. Comme $\lim_{k_{t+1} \to 0} f'(k_{t+1}) = +\infty$, $s\left(w(k_t), f'(k_{t+1})\right) \to 0^+$ lorsque $k_{t+1} \to 0$.